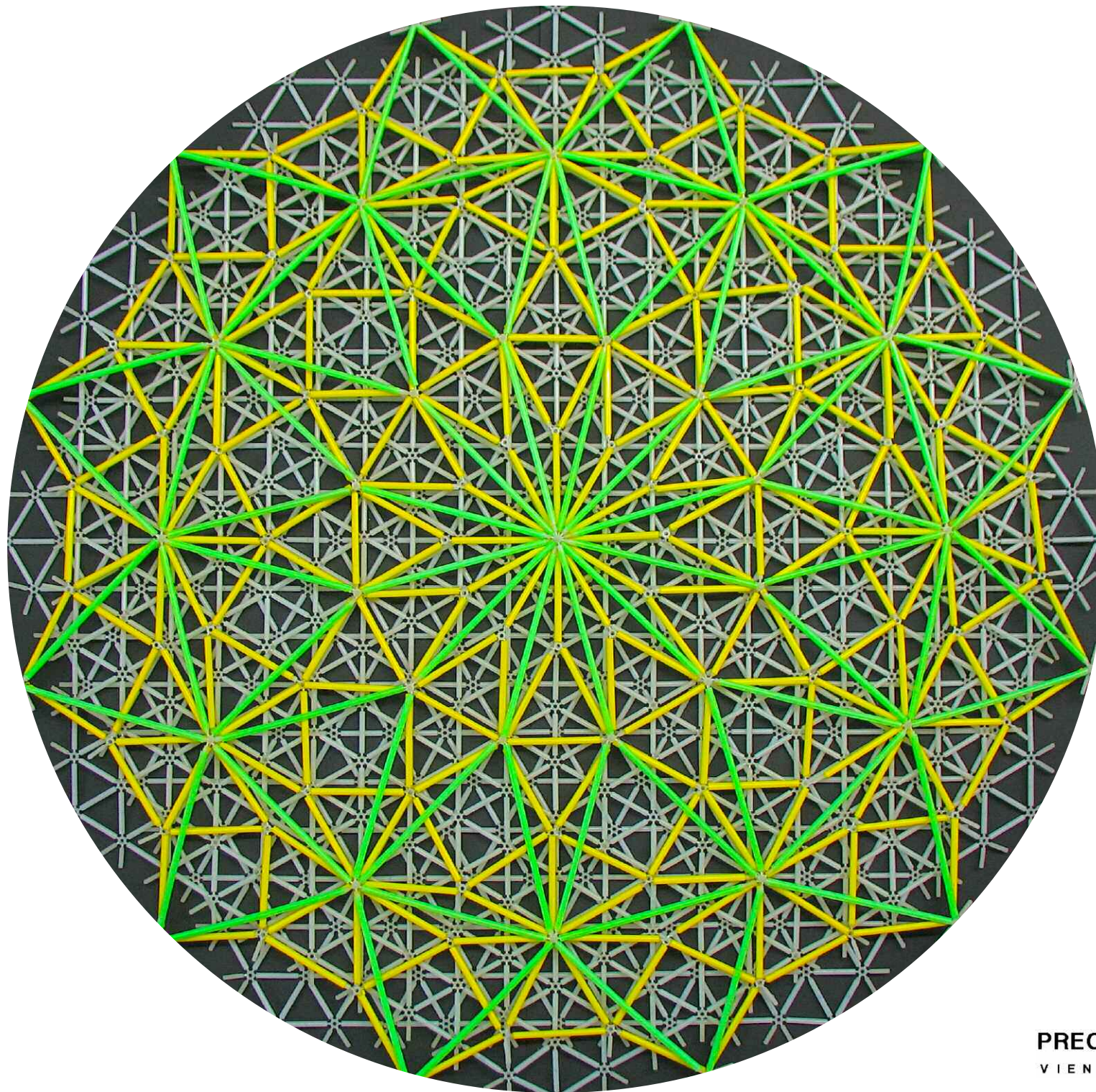
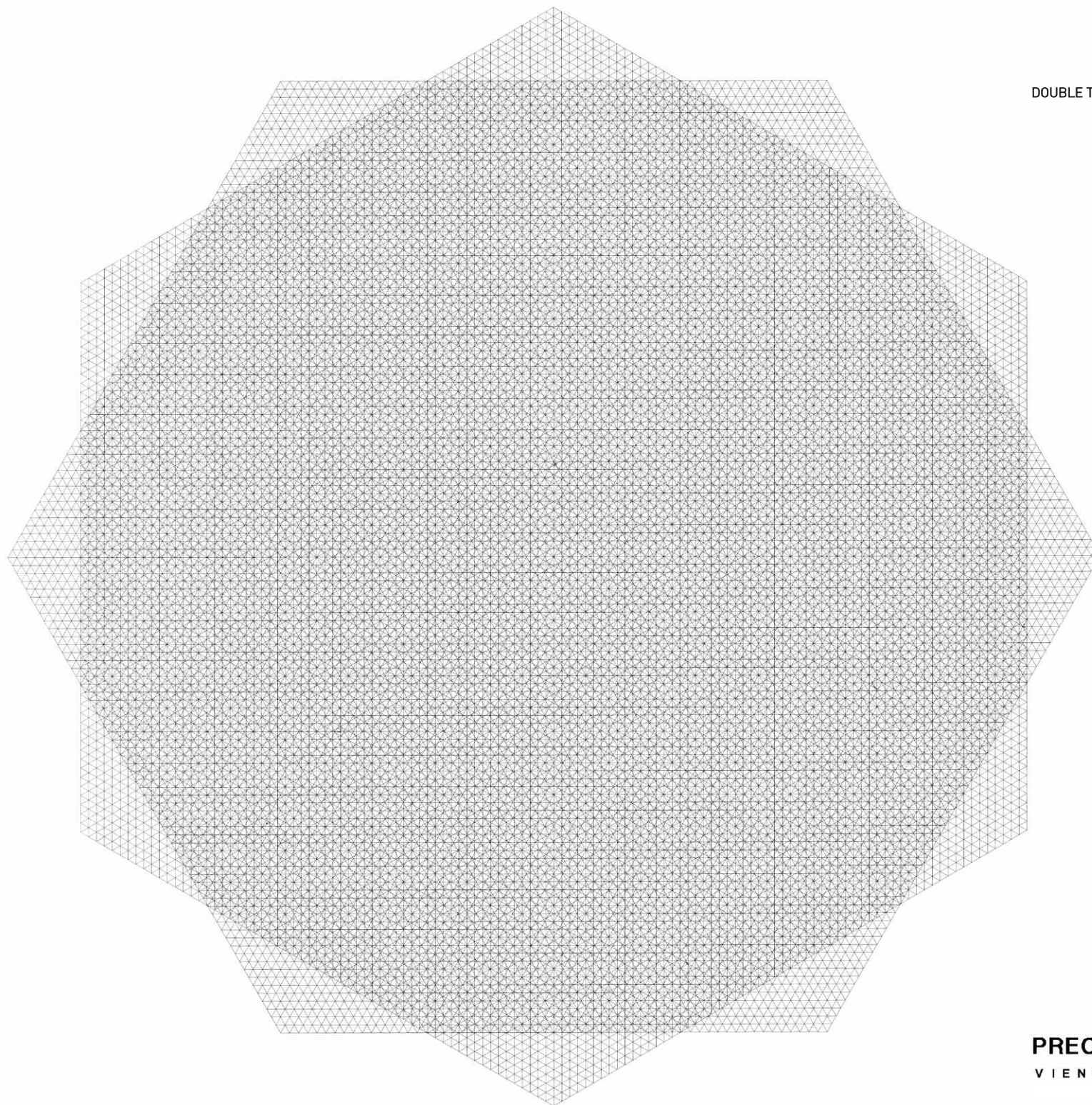




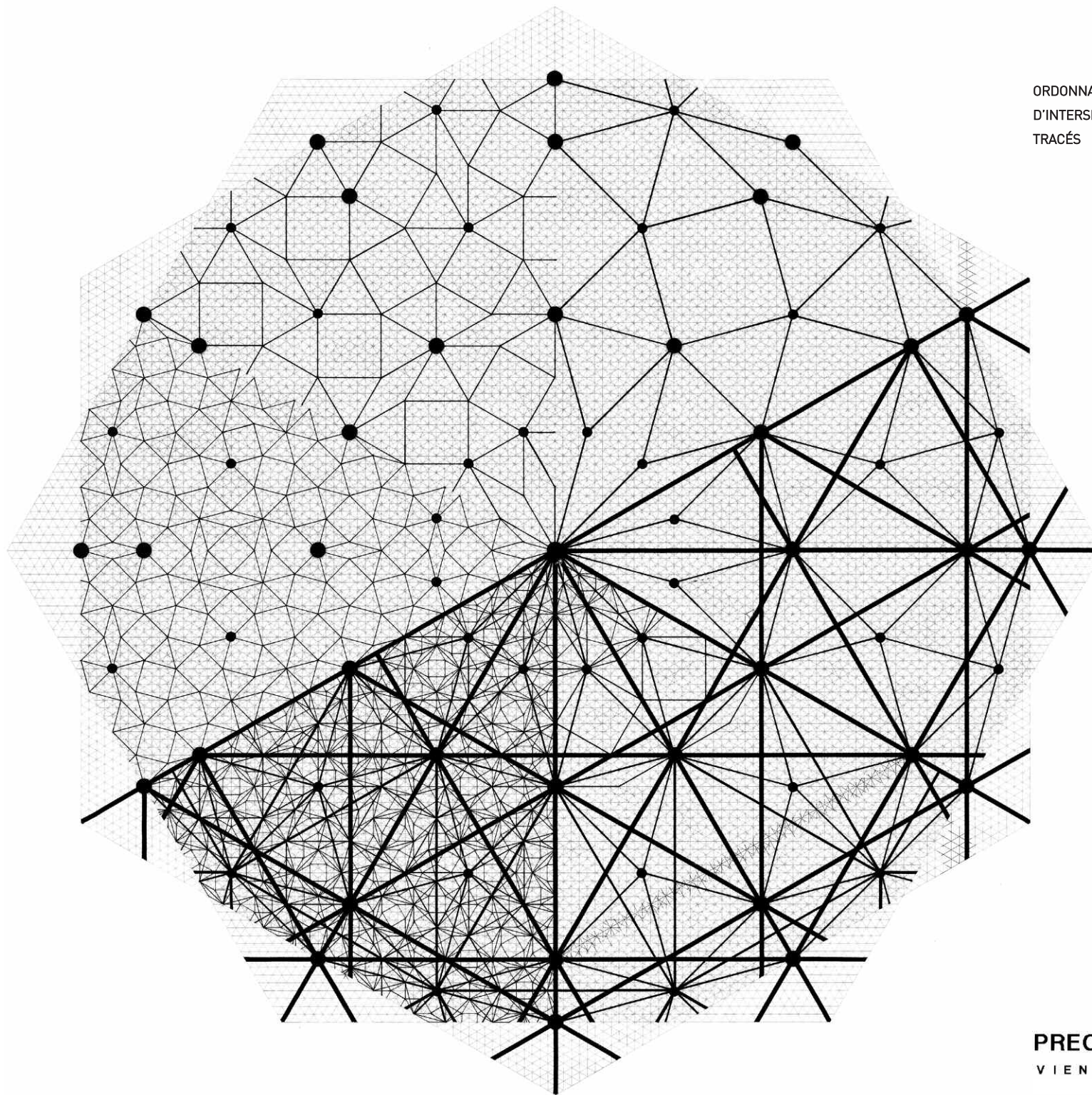
PRECISION FLOUE
V I E N N E - 9 JUIN 1996

DOUBLE TRAME TRIANGULAIRE

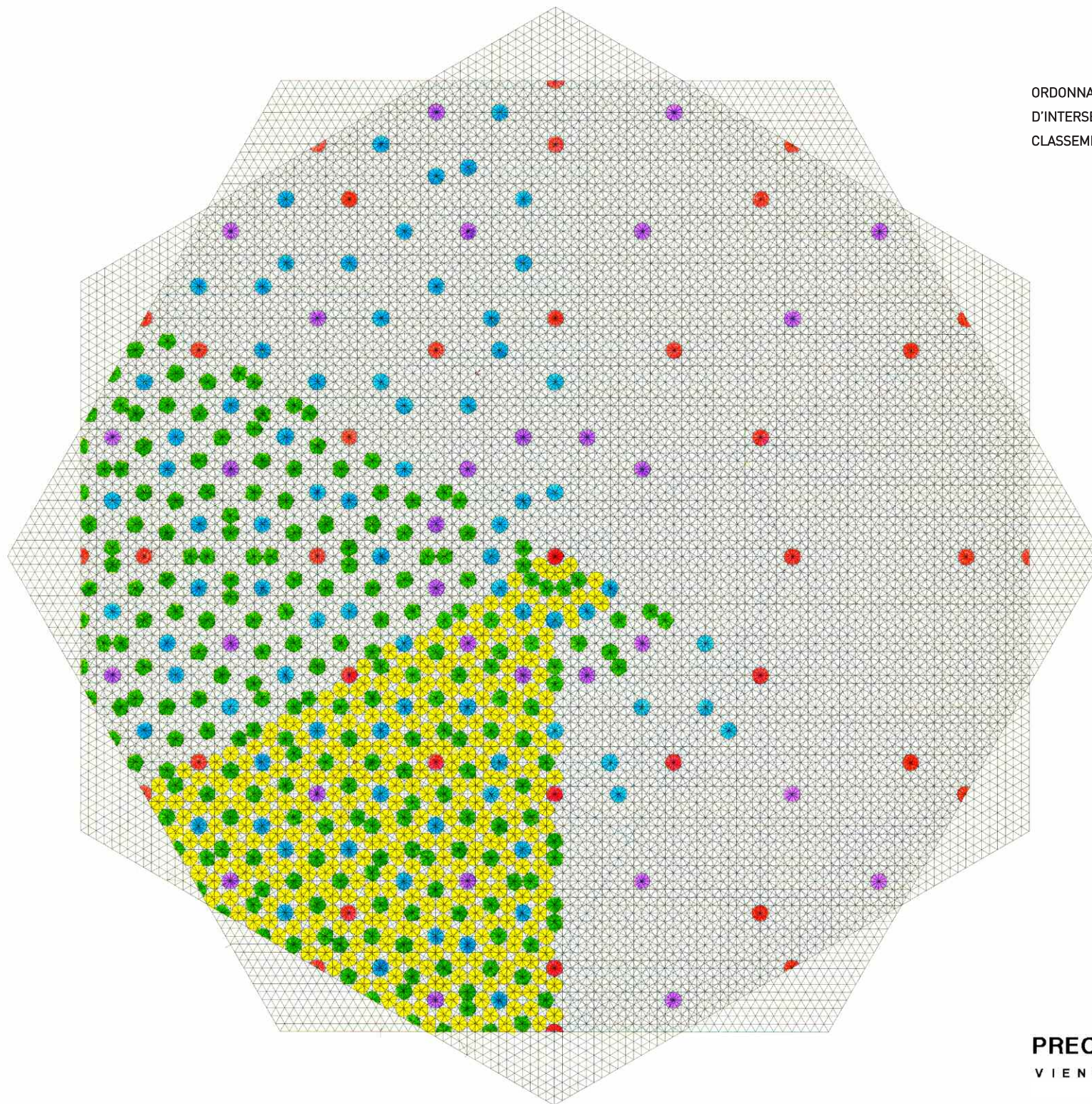


PRECISION FLOUE
V I E N N E - 9 JUIN 1996

ORDONNANCE DES PRÉCISIONS
D'INTERSECTIONS DE LA TRAME :
TRACÉS



PRECISION FLOUE
V I E N N E - 9 JUIN 1996



ORDONNANCE DES PRÉCISIONS
D'INTERSECTIONS DE LA TRAME :
CLASSEMENT DES INTERSECTIONS

PRÉCISION FLOUE

explications

Trame de base formée de 2 résilles triangulaires équilatérales identiques superposées avec une rotation de 30 degrés à partir d'une intersection commune 0 (origine).

Cette trame considérée sur une grande étendue présente visuellement, en tapis uniforme, une juxtaposition de rondelles à 12 rayons plus ou moins précises parmi lesquelles il est impossible d'identifier le point d'origine 0. (p. 1)

- Existe-t'il d'autres intersections identiques au point 0 ?
- Comment ordonner les intersections de cette trame en fonction de leur précision ?

Partant du point 0, 12 radiales semblables combinent les intersections d'une suite de cotés de triangles équilatéraux ($U=1$) avec celles d'une suite de double hauteurs de ces triangles ($\sqrt{3}$).

Le rythme de convergence de ces deux suites $26U$ pour $15\sqrt{3}$ (soit : $26/25,980762... U$) offre une précision relative pour cette première conjonction.

Avec cette nouvelle unité ($U=26$ environ) et toujours partant du point 0 sur les mêmes radiales, on construit une grande trame analogue à la trame de base.

Les intersections de cette dernière recouvrent approximativement celles de la trame de base les plus précises.

On remarque que les 12 points de la première conjonction - d'une précision égale - sont plus proches entre eux que du point d'origine 0 a une distance, par rapport a celle-ci proportionnellement exacte de $1/\sqrt{2+3}$, mais dans une direction intermédiaire à celles des radiales et à celles des lignes de la trame.

FUZZY PRECISION

description

Base grid formed of 2 identical equilateral triangular lattices superimposed with a rotation of 30 degrees starting from a common intersection at point 0 (origin).

Considered over a broad area, this base grid appears as a uniform carpet, a juxtaposition of more or less precise disks with 12 radiating rays, among which it is impossible to discern the point of origin 0. (p. 1)

- Are there other intersections identical to point 0?
- How would the intersections of this grid be organized based on their precision?

Starting from point 0, 12 rays combine the intersections of a series of sides of equilateral triangles ($U=1$) with the intersections of a series of triangles with a sides equal to two times the height of the first-series triangles ($\sqrt{3}$).¹

The rate of convergence of these two series - $26U$ for $15\sqrt{3}$ (i.e., $26/25.980762... U$) - provides a measure of precision for this first precision conjunction.

With this new unit ($U=26$ approximately) and still starting from point 0 on the same radii, we now construct a large grid similar to the base grid.

The intersections of this second grid roughly cover the most precise intersections of the base grid.

We note that the 12 points of equal precision comprising the first conjunction are nearer to each other than they are to the point of origin 0 by a distance in the exact proportion of $1/(\sqrt{2+\sqrt{3}})$, but along intermediate radii midway between the radii of the original grid.

Cette distance dans cette nouvelle direction, prise comme module de précision, permet par maillage de relier l'ensemble des 36 premiers points issus de la grande trame avec 36 points intermédiaires situés sur de nouvelles radiales décalées de 15 degrés, pour former une rosace dont tous les points coïncident aux 72 intersections les plus précises de la trame de base autour du point 0.

Cette rosace dodécagonale (régulière) de rayon égal à 2 fois la première conjonction (52 U environ) est formée de polygones (triangles équilatéraux, carrés, losanges) ayant pour cotés le module de maillage et dont les angles sont des multiples de 30 degrés (60, 90, 30 et 150 respectivement).

Elle correspond au niveau 7 d'expansion de la rosace harmonique.

Par maillage identique au précédent, mais prenant pour module la distance entre les premiers points intermédiaires, on obtient, construite sur les radiales décalées de 15 degrés, la même rosace réduite dans la même proportion de $1/\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et correspondante au niveau 6 d'expansion de la rosace harmonique. (p. 2)

Poursuivant cette démarche jusqu'au niveau 1 (expansion 0), cette dernière rosace construite sur les mêmes radiales que celles des niveaux 3, 5 et 7 aura un rayon égal à 1 U. (p. 3)

L'ensemble de ces rosaces superposées constitue la rosace harmonique dont le nombre de niveaux d'expansion au-delà du niveau 7 peut être illimité. (p. 4)

On peut donc constater pour la rosace harmonique :

- un rythme d'expansion de $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ alterné pair/impair sur des radiales décalées de 15 degrés (ou un rythme d'expansion de $2+\sqrt{3}$ sur une seule radiale paire ou impaire).
- que ce rythme engendre à chaque niveau un maillage d'éléments modulaires - triangles, carrés, losanges - définissant la structure d'un pavage continu. (p. 5)

Le pavage est caractérisé par le module du maillage.

This distance along the new directions of the intermediate radii, taken as a modular length, makes it possible to construct a "net" comprised of all of the first 36 points of the large grid with the 36 intermediate points situated on a new set of rays rotated by 15 degrees, to form a rosette, all of whose points coincide with the 72 most precise intersections of the base grid around the point 0.

This (regular) dodecagonal rosette with radii equal to 2 times the first conjunction (52U approximately) is formed from polygons (equilateral triangles, squares, rhombuses) having the modular length as sides and having angles in multiples of 30 degrees.

This dodecagonal rosette corresponds to level 7 of the expansion of the harmonic rosette.

Creating a netting identical to the preceding, but taking as a modular length the distance between the first intermediate points, we obtain -- constructed on the radii rotated 15° -- the same rosette, reduced in the same proportion of $1/\sqrt{2+\sqrt{3}}$ and corresponding to level 6 of the expansion of the harmonic rosette. (p. 2)

Continuing this step down to level 1 (expansion 0), this last rosette -- built on the same radii as those of levels 3, 5, and 7 -- will have a radius equal to 1U. (p. 3)

The set of these superposed rosettes constitutes the harmonic rosette, which can be expanded to an unlimited number of expansion levels beyond level 7. (p. 4)

We note the following for the harmonic rosette :

- an expansion rate of $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ alternating on even/odd radii rotated 15° (or an expansion rate of $2+\sqrt{3}$ on any given even or odd radius).
- this expansion rate generates at each level a netting of modular (i.e. equal-edge) elements - triangles, squares, rhombuses - defining the structure of a continuous tiling. (p. 5)

The tiling's defining characteristic at each level is the netting module (length).

Il est le prolongement illimité des rosaces, possible à chaque niveau par répétition des éléments qu'elles contiennent (tous et eux seuls) y compris dans la disposition de superposition des niveaux différents.

Chaque élément (triangle, carré, ou losange) venant au-delà de sa rosace s'inscrire et s'intercaler de proche en proche dans les éléments du niveau supérieur de manière entièrement déterminée et toujours identique, révélant un ordre fractal non périodique. (p. 7, 8, 9, et 10)

Avec comme base $U=1=OI$ rayon de la rosace du niveau 1 (p. 3), on constate également :

- que tous les points de la rosace harmonique et ceux des différents pavages sont déterminés avec précision et situés exactement à égale distance entre les intersections de la trame cumulant les valeurs de U et celles cumulant les valeurs $\sqrt{3}$ les plus proches, soit :

$$P = (xU + y\sqrt{3})/2 \text{ (p. 6)}$$

Enfin, on remarque :

- que plus le niveau d'expansion de la rosace est élevé et plus la distance du point O est grande, plus la précision entre les points de la rosace et les intersections de la trame augmente, sans jamais atteindre celle du point O .
- et inversement, que lorsque le niveau d'expansion diminue, le nombre d'intersections de la trame concernées augmente avec une précision moindre.

Au niveau 4, le module de maillage est de $1+\sqrt{3}/2 U$

Il donne un pavage très proche de l'ensemble des « rondelles visibles » de la trame de base, l'ordonnance de leurs précisions étant hiérarchisée par la superposition des pavages de niveaux supérieurs.

The tiling is the unlimited prolongation of the rosettes, possible at each level by repeating the elements which they contain. This is true also in the positioning of superposed levels.

Each element (triangle, square, or rhombus) moves beyond its rosette to fit and intercalate element by element within the elements of the higher level in an entirely determinate and always identical manner, revealing an aperiodic fractal order. (p. 7, 8, 9, and 10)

With $U=1=OI$ as a base - the radius of the level 1 rosette - (p. 3), we also note that :

- all points of the harmonic rosette and those of the various tilings are precisely determined and located exactly at equal distance between the intersections of the grid that combines the values of U and the grids combining the nearest values $\sqrt{3}$, i.e. :

$$P = (xU + y\sqrt{3})/2 \text{ (p. 6)}$$

Lastly, we note that :

- The greater the rosette's expansion level and the greater the distance from point O , the greater the precision between the rosette points and the grid intersections, but without ever attaining the precision of the point of origin O .
- The greater the rosette's expansion level and the greater the distance from point O , the greater the precision between the rosette points and the grid intersections, without ever reaching the precision of point O .

At level 4, the netting module (modular length) is $1+\sqrt{3}/2 U$

It gives a tiling very close to the base grid's set of "visible disks", the ordering of their precisions being ranked by the superposition of the tilings of higher levels.

1. Translator's note (TN) : After superposing a second trigonal lattice (both "base" lattices composed of equilateral triangles with sides of length = 1), but rotated 30° relative to the first lattice, a 3rd "virtual" trigonal lattice emerges, composed of the points at which lines of the two base lattices intersect. The triangles of this third trigonal lattice have sides of length $\sqrt{3}$, composed of two altitudes of a base-lattice triangle.

In considering whether there would ever be another point of equal precision as the origin, the answer is No, because $\sqrt{3}$ is irrational and no multiple of $\sqrt{3}$ will ever be an exact integer.

PRÉCISION FLOUE vérifications

Position des points caractéristiques de la rosace harmonique par rapport aux intersections de la trame de base sur une radiale impaire d'origine O.

(rythme d'expansion $2+\sqrt{3}$: 3,732050... voir dessins)

$U = 1$, base de calcul coté du triangle équilatéral de la trame

$\sqrt{3} = 1,732050...$ double hauteur du même triangle.

Position of the harmonic rosette's characteristic points compared with the intersections of the base grid on an odd radius from origin O.

(expansion rate $2+\sqrt{3}$: 3.732050... see drawings ; see drawing 5 for harmonic rosette points)

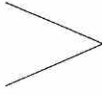
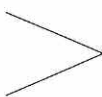
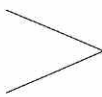
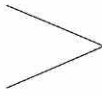
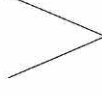
$U = 1$, calculation base, the side of the base grid's equilateral triangle

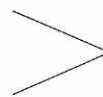
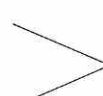
$\sqrt{3} = 1.732050...$ twice the height of the base grid's equilateral triangle.

Intersections Trame / Grid		Points Rosace H. Harmonic rosette pts	Distance/U depuis origine O Distance (U) from origin O	Imprécision symétrique Symmetrical imprecision
U	$\sqrt{3}$	O	0	0
1/2	1/2	B ¹ , A ²	0,5	0
		D ¹	0,866 025	0
		I ¹ 1	1	0
		C ²	1,366 025	0,366 025
1	1	E ² , B ³ , A ⁴	1,732 050	0,133 974
		D ³	3,232 050	0,232 050
		I ³ 3	3,464 101	0,267 949
		C ⁴	5,098 076	0,098 076
2	2		5,196 152	
3	3			

U	$\sqrt{3}$			
7	4	E ⁴ , B ⁵ , A ⁶	6,928 203 6,964 101 7	0,035 898
12	7	D ⁵	12 12,062 177 12,124 355	0,062 177
14	8	I ⁵ 5	13,856 406 13,928 203 14	0,071 796
19	11	C ⁶	19 19,026 279 19,052 558	0,026 279
26	15	E ⁶ , B ⁷ , A ⁸	25,980 762 25,990 381 26	0,009 618
45	26	D ⁷	45 45,016 660 45,033 320	0,016 660
52	30	I ⁷ 7	51,961 524 51,980 762 52	0,019 237

C

Intersections Trame / Grid		Points Rosace H. Harmonic rosette pts	Distance/U depuis origine O Distance (U) from origin O	Imprécision symétrique Symmetrical imprecision
U	$\sqrt{3}$			
71	41	C ⁸	71 71,007 041 71,014 083	 0,007 041
	56	E ⁸ , B ⁹ , A ¹⁰	96,994 845 96,997 422 97	 0,002 577
97				
168	97	D ⁹	168 168,004 464 168,008 928	 0,004 464
	112	I ⁹ 9	193,989 690 193,994 845 194	 0,005 154
194				
265	153	C ¹⁰	265 265,001 886 265,003 773	 0,001 886
	209	E ¹⁰ , B ¹¹ , A ¹²	361,998 618 361,999 309 362	 0,000690
362				
627	362	D ¹¹	627 627,001 196 627,002 392	 0,001 196

U	$\sqrt{3}$			
	418	I ¹¹ 11	723,997 237 723,998 618 724	 0,001 381
724				
989	571	C ¹²	989 989,000 505 989,001 011	 0,000 505
	780	E ¹² , B ¹³ , A ¹⁴	1 350,999 629 1 350,999 814 1 351	 0,000 185
1 351				
2 340	1 351	D ¹³	2 340 2 340,000 320 2 340,000 641	 0,000 320
	1 560	I ¹³ 13	2 701,999 259 2 701,999 629 2 702	 0,000 370
2 702				
3 691	2 131	C ¹⁴	3 691 3 691,000 135 3 691,000 270	 0,000 135
	2 911	E ¹⁴ , B ¹⁵ , A ¹⁶	5 041,999 900 5 041,999 950 5 042	 0,000 049
5 042				

E

Intersections Trame / Grid		Points Rosace H. Harmonic rosette pts	Distance/U depuis origine 0 Distance (U) from origin 0	Imprécision symétrique Symmetrical imprecision
U	$\sqrt{3}$			
8 733		D¹⁵	8 733	
	5 042		8 733,000 085	> 0,000 085
			8 733,000 171	
	5 822	I¹⁵ 15	10 083,999 801	
			10 083,999 900	> 0,000 099
			10 084	
10 084		C¹⁶	13 775	
			13 775,000 036	> 0,000 036
			13 775,000 072	
	7 953	E¹⁶, B¹⁷, A¹⁸	18 816,999 873	
			18 816,999 986	> 0,000 013
			18 817	
	10 864	D¹⁷	32 592	
			32 592,000 022	> 0,000 023
			32 592,000 016	
	18 817	I¹⁷ 17	37 633,999 972	
			37 633,999 946	> 0,000 027
			37 634	
32 592		C¹⁸	51 409	
			51 409,000 009	> 0,000 010
			51 409,000 019	
	21 728			
37 634				
51 409				
	29 681			

...

Position de points intermédiaires aux précédents, déterminés par le prolongement et la répétition en PAVAGE des éléments de la rosace du niveau 3 d'expansion (par exemple).

EE = 1,866 025 ; CC = 1,366 025 ; AA = 0,500 000

Les points encadrés, communs au PAVAGE et à la rosace harmonique sont déjà précisés précédemment.

Position of points intermediate to the preceding, determined by prolongation and repetition in TILING the elements of the rosette of level 3 of the expansion (for example):

EE = 1.866 025; CC = 1.366 025; AA = 0.500 000

The framed points - in common with the TILING and the harmonic rosette - were already specified above.

Intersections Trame / Grid		Points pavage Tiling points	Entre Points Between points	Distance/U depuis origine 0 Distance (U) from origin 0	Imprécision symétrique Symmetrical imprecision
U	$\sqrt{3}$	O		0	
		B³	EE	1,866 025	
		D³	CC	3,232 050	
		I³ 3	AA	3,732 050	
		C⁴	CC	5,098 076	
		E⁴, B⁵, A⁶	EE	6,964 101	
8				8	
	5	D ³	CC	8,330 127	> 0,330 127
				8,660 254	
		D ³	AA	8,830 127	> 0,169 873
				9	
9					
10				10	
	6	D ³	CC	10,196 152	> 0,196 152
				10,392 304	
		D ³	AA	10,696 152	> 0,303 848
				11	
11					

Intersections Trame / Grid		Points pavage Tiling points	Entre Points Between points	Distance/U depuis origine 0 Distance (U) from origin 0	Imprécision symétrique Symmetrical imprecision	
U	$\sqrt{3}$					
15	9	D ⁵	CC	12,062 177		
		I ⁵ 5	EE	13,928 203		
16	9	D ³	CC	15,294 228		0,294 228
		D ³	AA	15,588 457		
17	10	D ³	CC	15,794 228		0,205 771
		D ³	AA	16		
18	10	D ³	CC	17,160 254		0,160 254
		D ³	AA	17,320 508		
21	12	D ³	CC	17,660 254		0,339 746
		C ⁶	CC	18		
22	13	B ³	CC	19,026 279		0,339 746
		B ³	EE	20,784 609		
23	14	D ³	CC	20,892 304		0,107 695
		D ³	AA	21		
24	14	D ³	CC	22,258 330		0,258 330
		D ³	AA	22,516 660		
		D ³	CC	22,758 330		0,241 670
		D ³	AA	23		
		B ³	CC	24		0,124 355
		B ³	CC	24,124 355		
		B ³	CC	24,248 711		0,124 355
		B ³	CC	24,248 711		

U	$\sqrt{3}$	E ⁶ , B ⁷ , A ⁸	EE	25,990 381
27	16	D ³	CC	27
28		D ³	AA	27,356 406
29	17	D ³	CC	27,712 813
30		D ³	AA	27,856 406
31	18	B ³	CC	28
33		B ³	EE	29
34	20	D ³	CC	29,222 432
35		D ³	AA	29,444 863
	20	D ³	AA	29,722 432
		D ³	AA	30
	20	D ³	CC	31
		D ³	AA	31,088 457
	20	D ³	CC	31,176 914
		D ³	AA	31,176 914
	20	D ³	CC	32,908 965
		D ³	AA	32,954 482
	20	D ³	CC	33
		D ³	AA	34
	20	D ³	CC	34,320 508
		D ³	AA	34,641 016
	20	D ³	CC	34,820 508
		D ³	AA	35

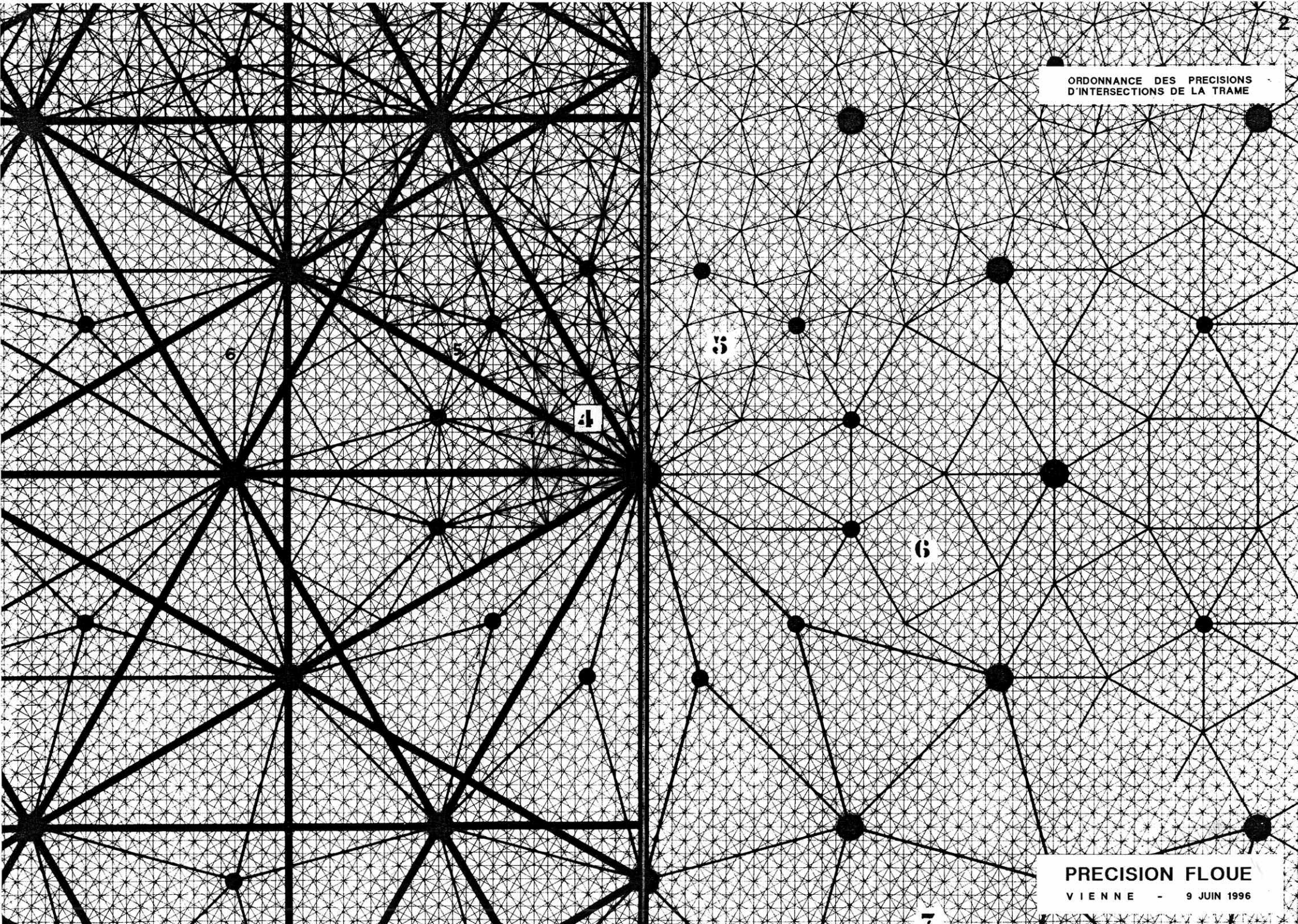
Intersections Trame / Grid		Points pavage Tiling points	Entre Points Between points	Distance/U depuis origine 0 Distance (U) from origin 0		Imprécision symétrique Symmetrical imprecision
U	√3					
36	21	D ³	CC	36 36,186 533	0,186 533	
		D ³	AA	36,373 067 36,686 533	0,313 466	
37				37		
38	22	B ³	CC	38 38,052 558	0,052 558	
				38,105 117		
	23	B ³	EE	39,837 168 39,918 584	0,081 416	
40				40		
41	24	D ³	CC	41 41,284 610	0,284 610	
		D ³	AA	41,569 219 41,784 610	0,215 390	
42				42		
43	25	D ³	CC	43 43,150 635	0,150 635	
		D ³	AA	43,301 270 43,650 695	0,349 365	
44				44		
		D ⁷	CC	45,016 660		

U	√3					
	27	B ³	EE	46,765 372 46,882 686	0,117 314	
47				47		
48	28	D ³	CC	48 48,248 711	0,248 711	
		D ³	AA	48,497 423 48,748 711	0,251 289	
49				49		
50	29	B ³	CC	50 50,114 738	0,114 738	
		I ⁷ 7	EE	50,229 473 51,980 762		
53	31	D ³	CC	53 53,346 788	0,346 788	
		D ³	AA	53,693 575 53,846 788	0,153 212	
54				54		
55	32	D ³	CC	55 55,212 813	0,212 813	
		D ³	AA	55,425 626 55,712 813	0,287 187	
56				56		
57	33	B ³	CC	57 57,078 838	0,078 838	
				57,157 676		

Intersections Trame / Grid		Points pavage Tiling points	Entre Points Between points	Distance/U depuis origine 0 Distance (U) from origin 0	Imprécision symétrique Symmetrical imprecision
U	$\sqrt{3}$				
59	34	B ³	EE	58,889 727	 0,055 196
				58,944 864	
				59	
60	35	D ³	CC	60	 0,310889
				60,310 889	
				60,621 778	
61		D ³	AA	60,810 889	 0,189 111
				61	
62	36	D ³	CC	62	 0,176 915
				62,176 915	
				62,353 829	
63		D ³	AA	62,676 915	 0,323 085
				63	
64	37	B ³	CC	64	 0,042 940
				64,042 940	
				64,085 880	
66	38	B ³	EE	65,817 990	 0,091 035
				65,908 965	
				66	

U	$\sqrt{3}$				
67	39	D ³	CC	67	 0,274 991
				67,274 991	
				67,549 981	
68		D ³	AA	67,774 991	 0,225 009
				68	
69	40	D ³	CC	69	 0,141 016
				69,141 016	
				69,282 032	
70		D ³	AA	69,641 016	 0,358 983
				70	
		C ³	EE	71,007 041	
...					

ORDONNANCE DES PRECISIONS
D'INTERSECTIONS DE LA TRAME



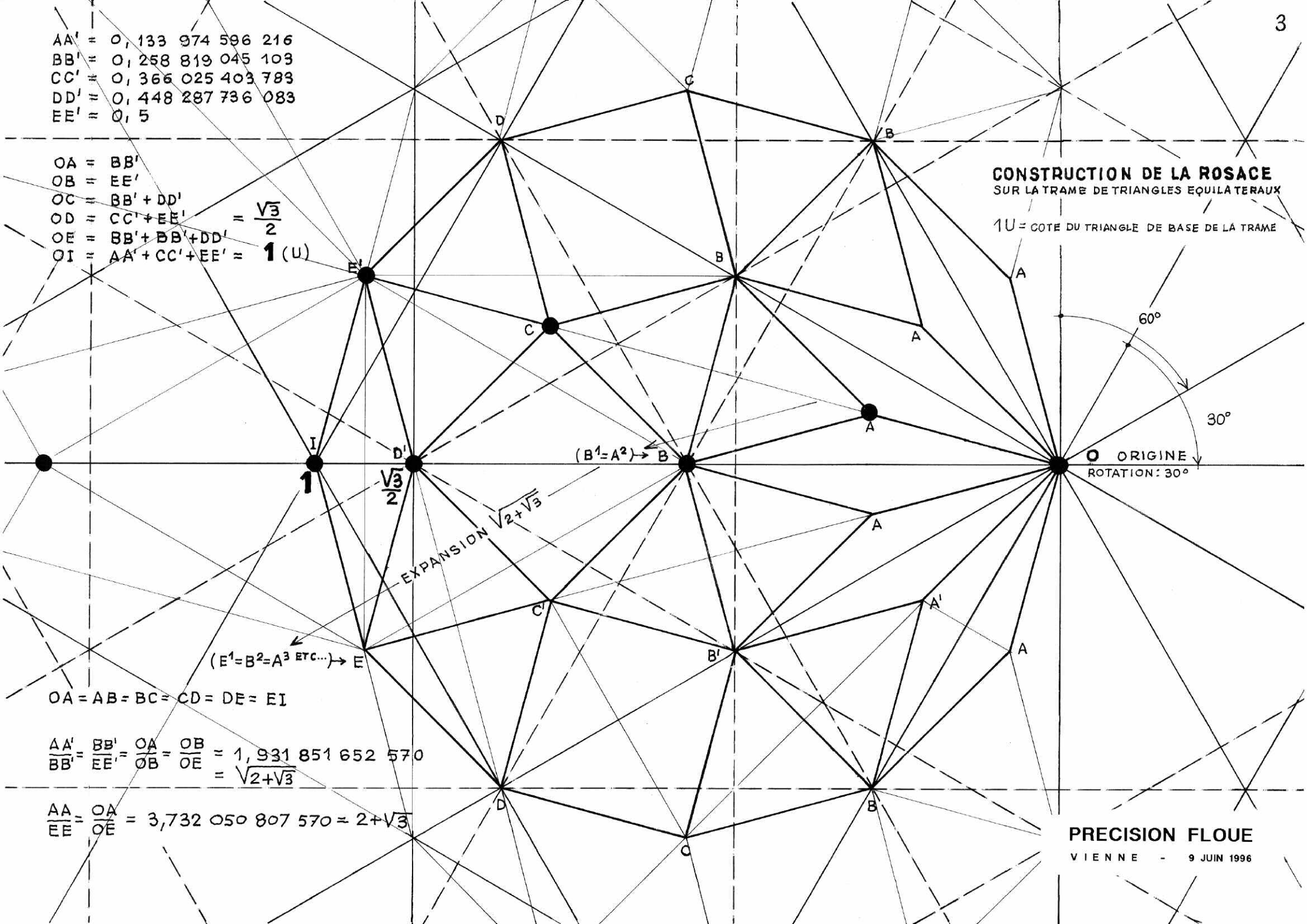
PRECISION FLOUE
VIENNE - 9 JUIN 1996

$AA' = 0,133\ 974\ 596\ 216$
 $BB' = 0,258\ 819\ 045\ 103$
 $CC' = 0,366\ 025\ 403\ 783$
 $DD' = 0,448\ 287\ 736\ 083$
 $EE' = 0,5$

$OA = BB'$
 $OB = EE'$
 $OC = BB' + DD'$
 $OD = CC' + EE' = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $OE = BB' + BB' + DD'$
 $OI = AA' + CC' + EE' = 1(U)$

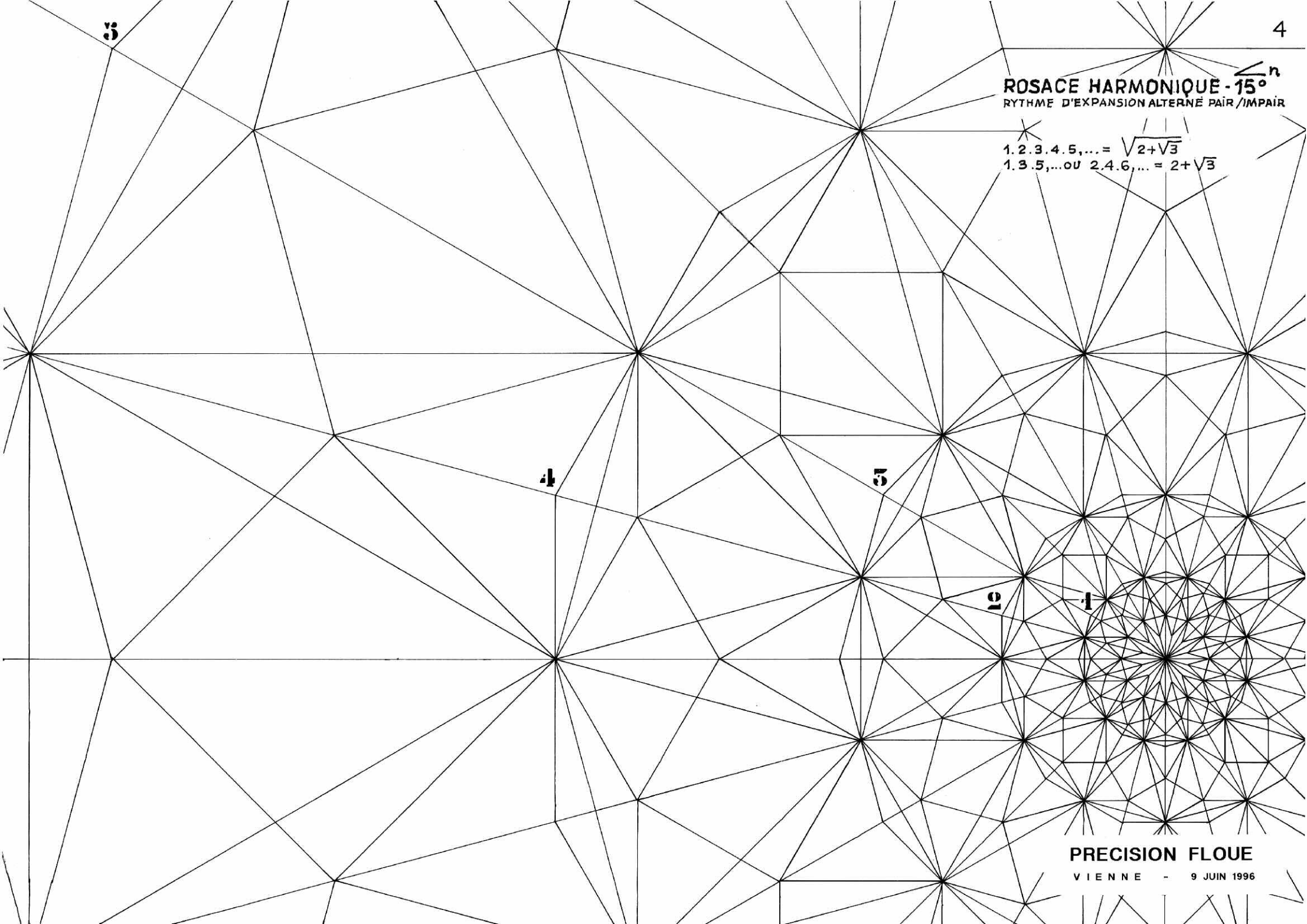
CONSTRUCTION DE LA ROSACE SUR LA TRAME DE TRIANGLES EQUILATERAUX

1U = COTE DU TRIANGLE DE BASE DE LA TRAME



PRECISION FLOUE

VIENNE - 9 JUIN 1996



3

4

ROSACE HARMONIQUE - 15°
RYTHME D'EXPANSION ALTERNÉ PAIR /IMPAIR

1.2.3.4.5,... = $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
1.3.5,...ou 2.4.6,... = $2+\sqrt{3}$

4

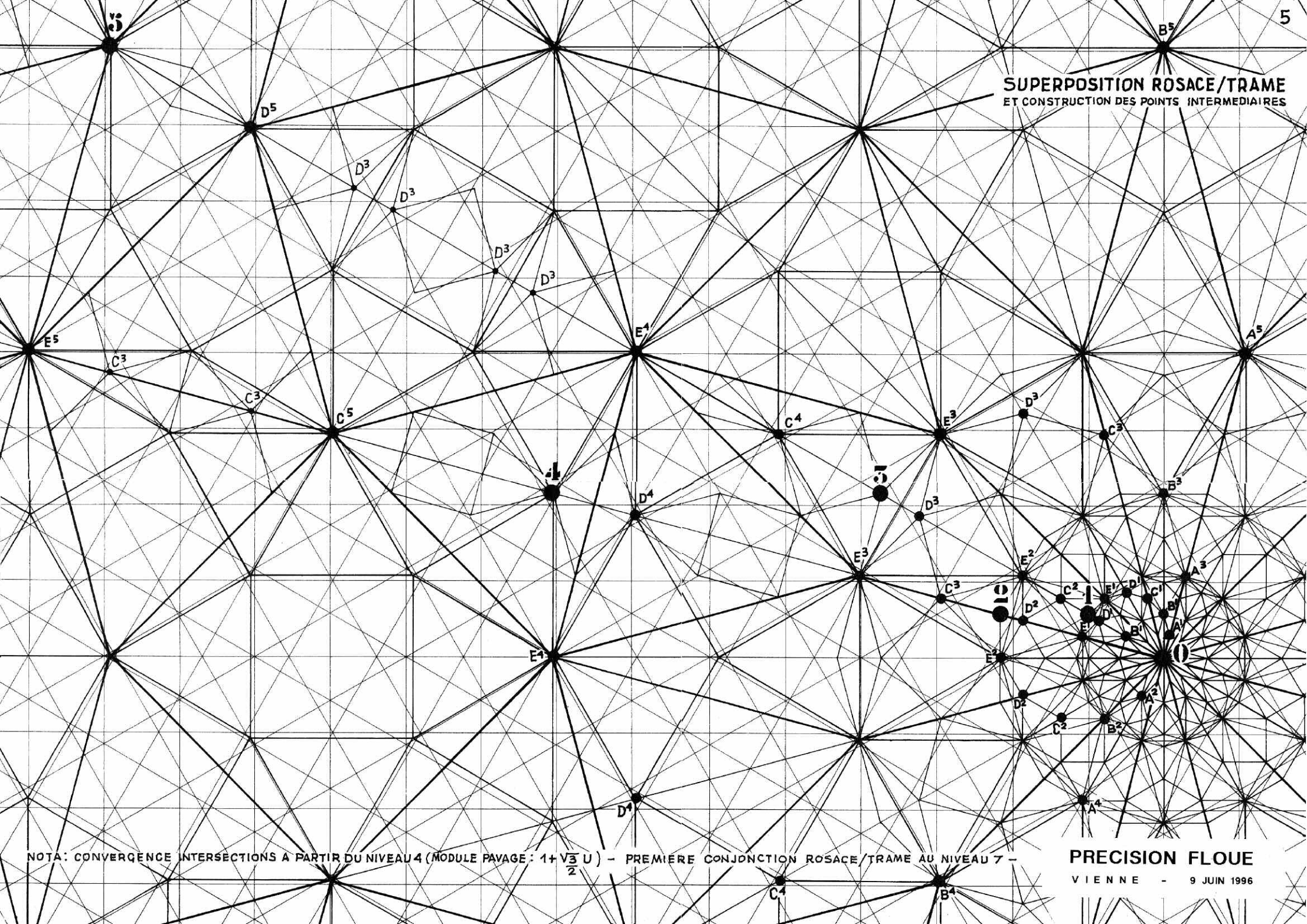
5

10

12

PRECISION FLOUE

VIENNE - 9 JUIN 1996

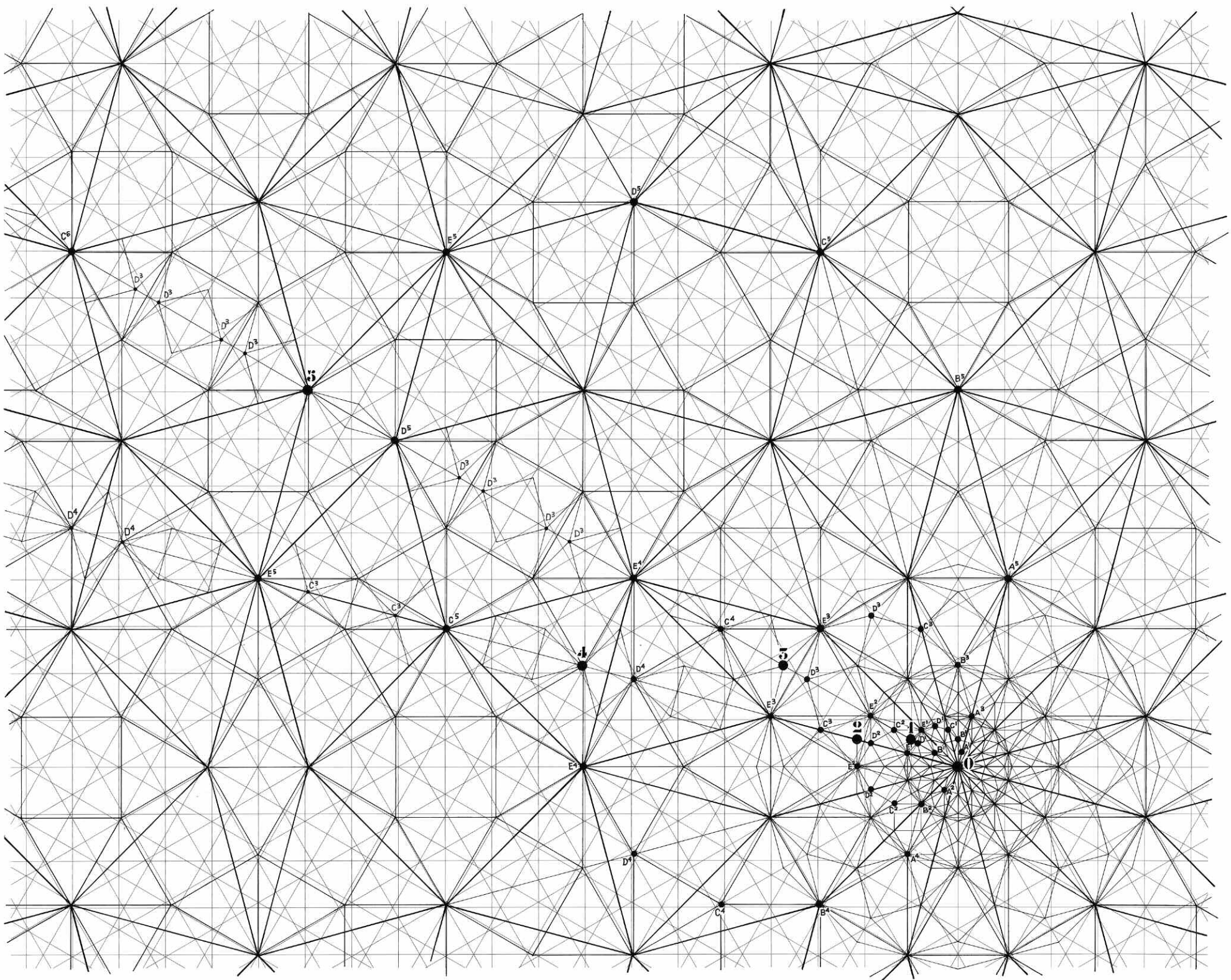


SUPERPOSITION ROSACE/TRAME
ET CONSTRUCTION DES POINTS INTERMEDIAIRES

NOTA: CONVERGENCE INTERSECTIONS A PARTIR DU NIVEAU 4 (MODULE PAVAGE: $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} U$) - PREMIERE CONJONCTION ROSACE/TRAME AU NIVEAU 7 -

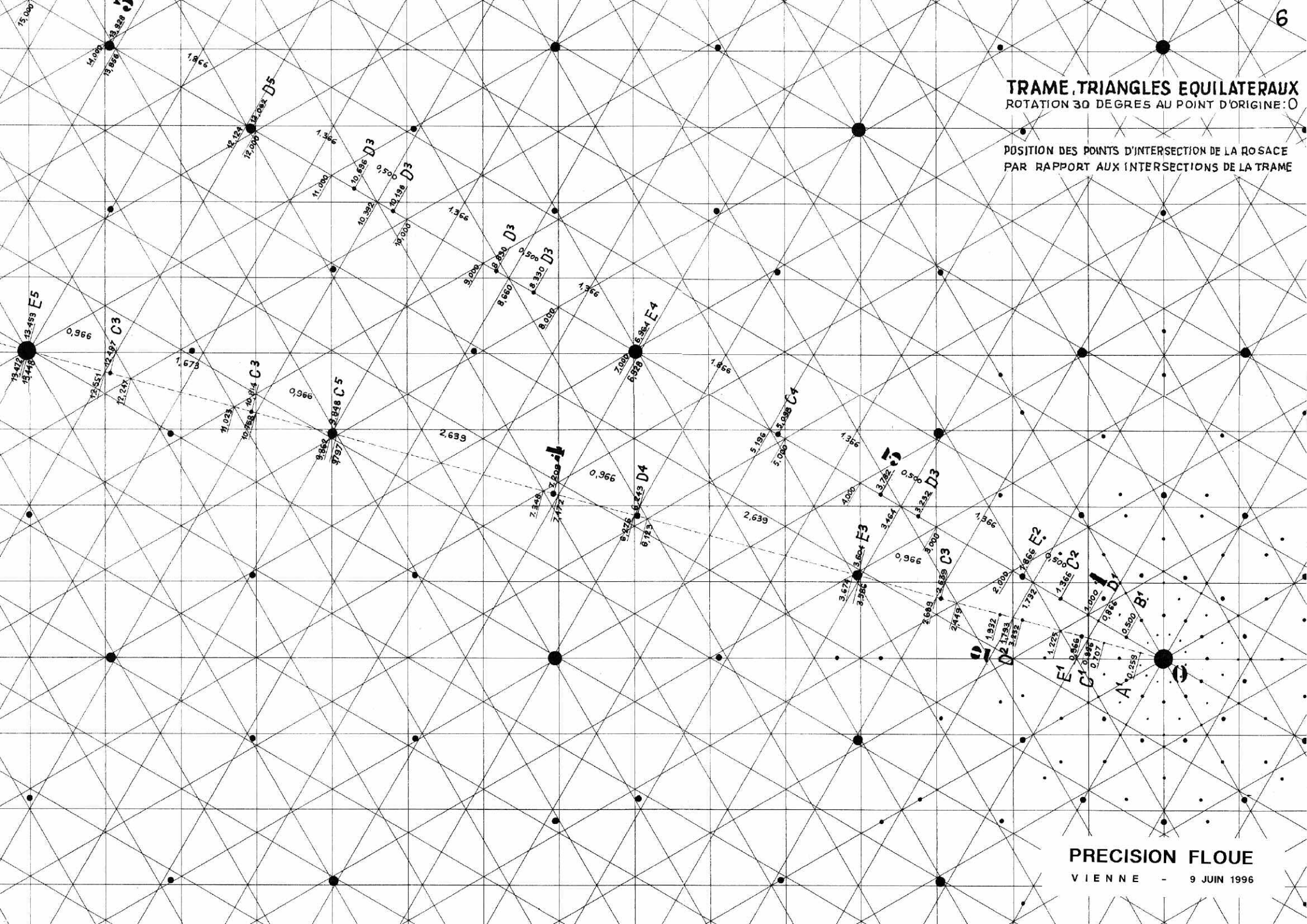
PRECISION FLOUE

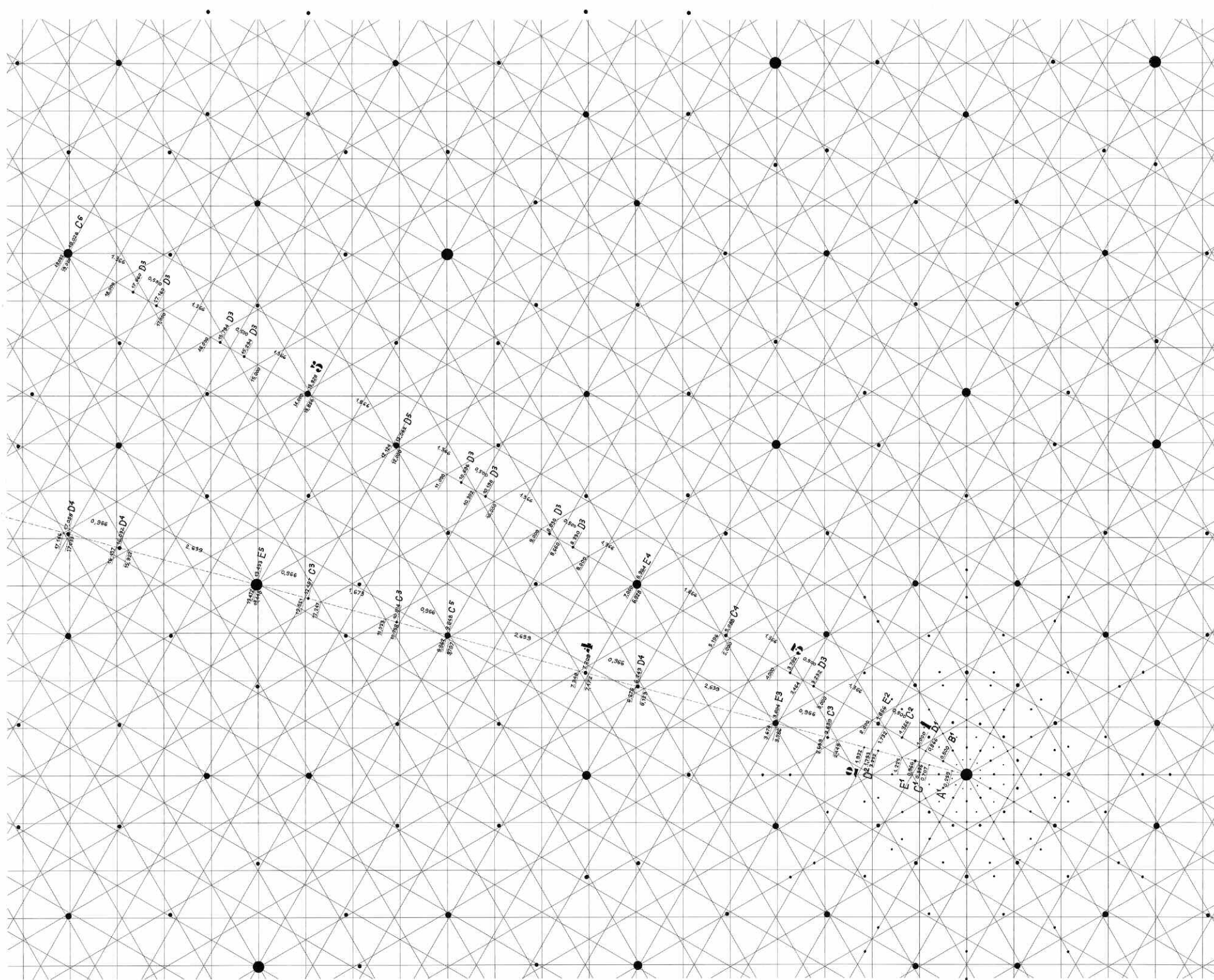
V I E N N E - 9 J U I N 1996



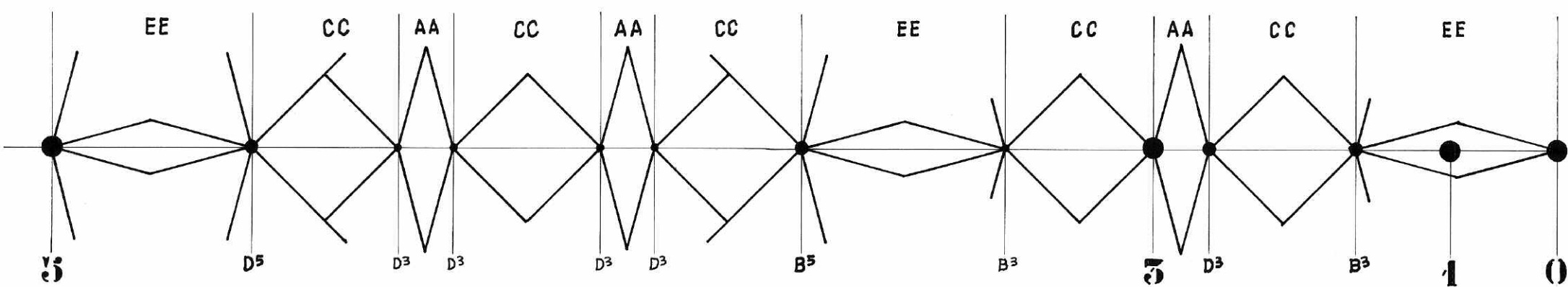
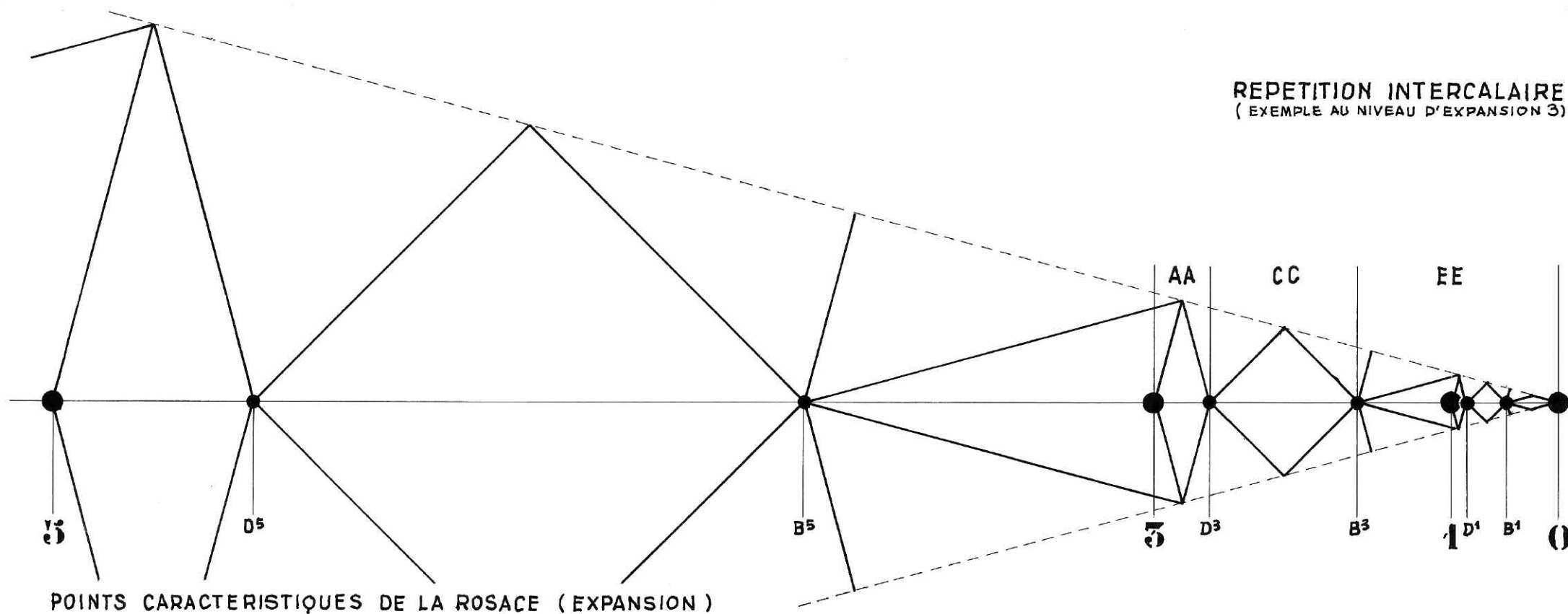
TRAME TRIANGLES EQUILATERAUX
ROTATION 30 DEGRES AU POINT D'ORIGINE: O

POSITION DES POINTS D'INTERSECTION DE LA ROSACE
PAR RAPPORT AUX INTERSECTIONS DE LA TRAME





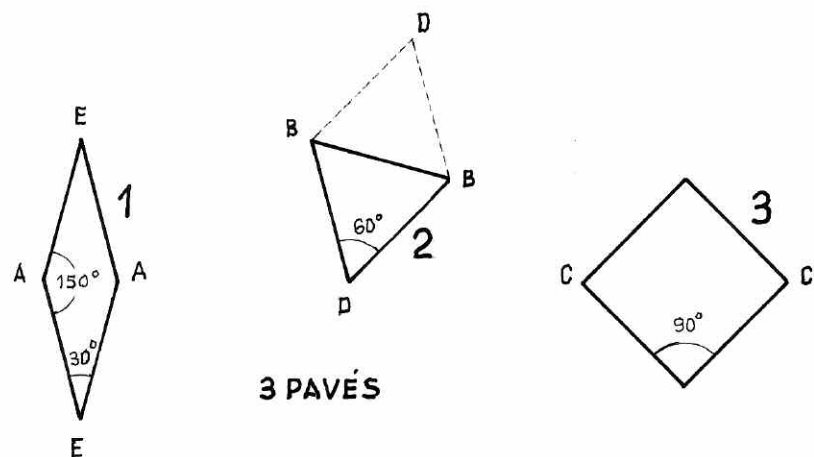
REPETITION INTERCALAIRE (EXEMPLE AU NIVEAU D'EXPANSION 3)



PRECISION FLOUE

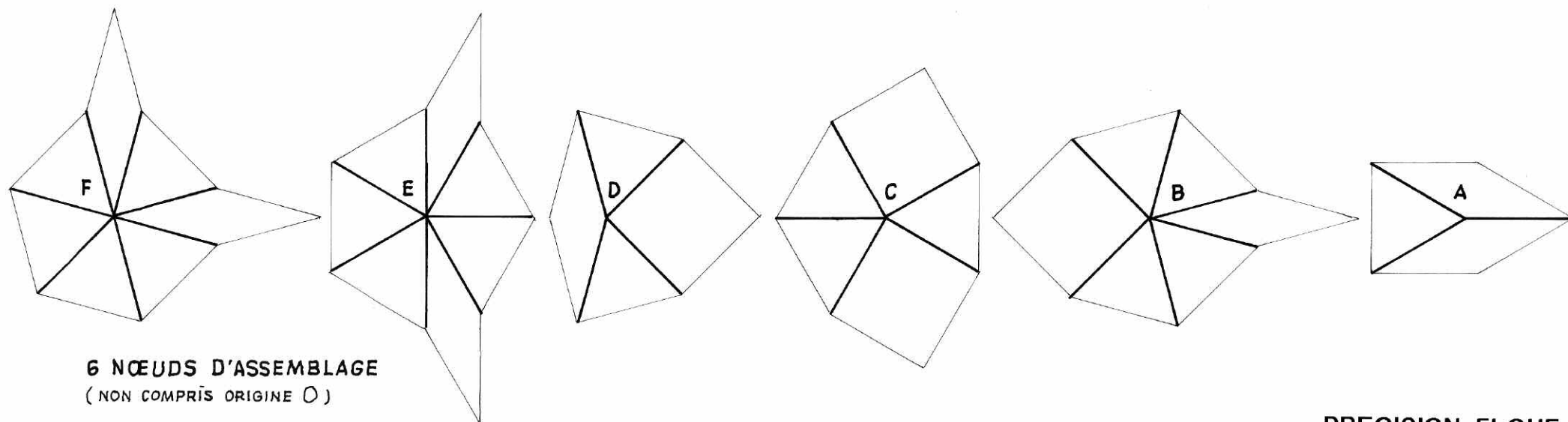
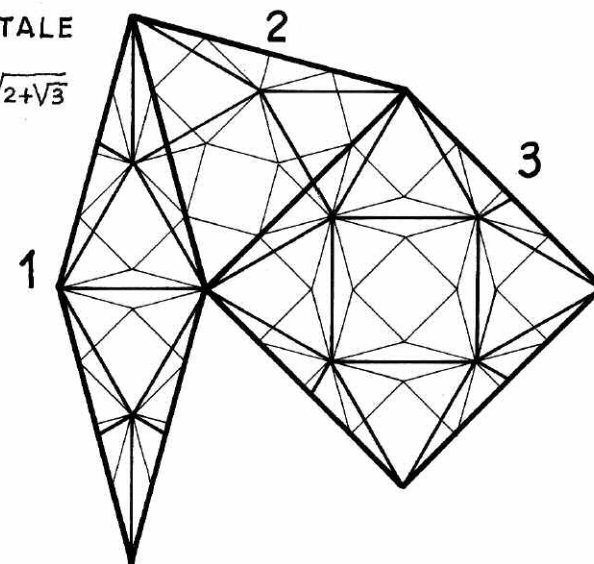
VIENNE - 9 JUIN 1996

1 MODULE DE LONGUEUR

BASE: $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ U NIVEAU D'EXPANSION 4ELEMENTS DU PAVAGE
ORGANISATION ET TYPIFICATION

DISPOSITION FRACTALE

3 RAPPORTS SUCCESSIFS

RYTHME D'EXPANSION: $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 

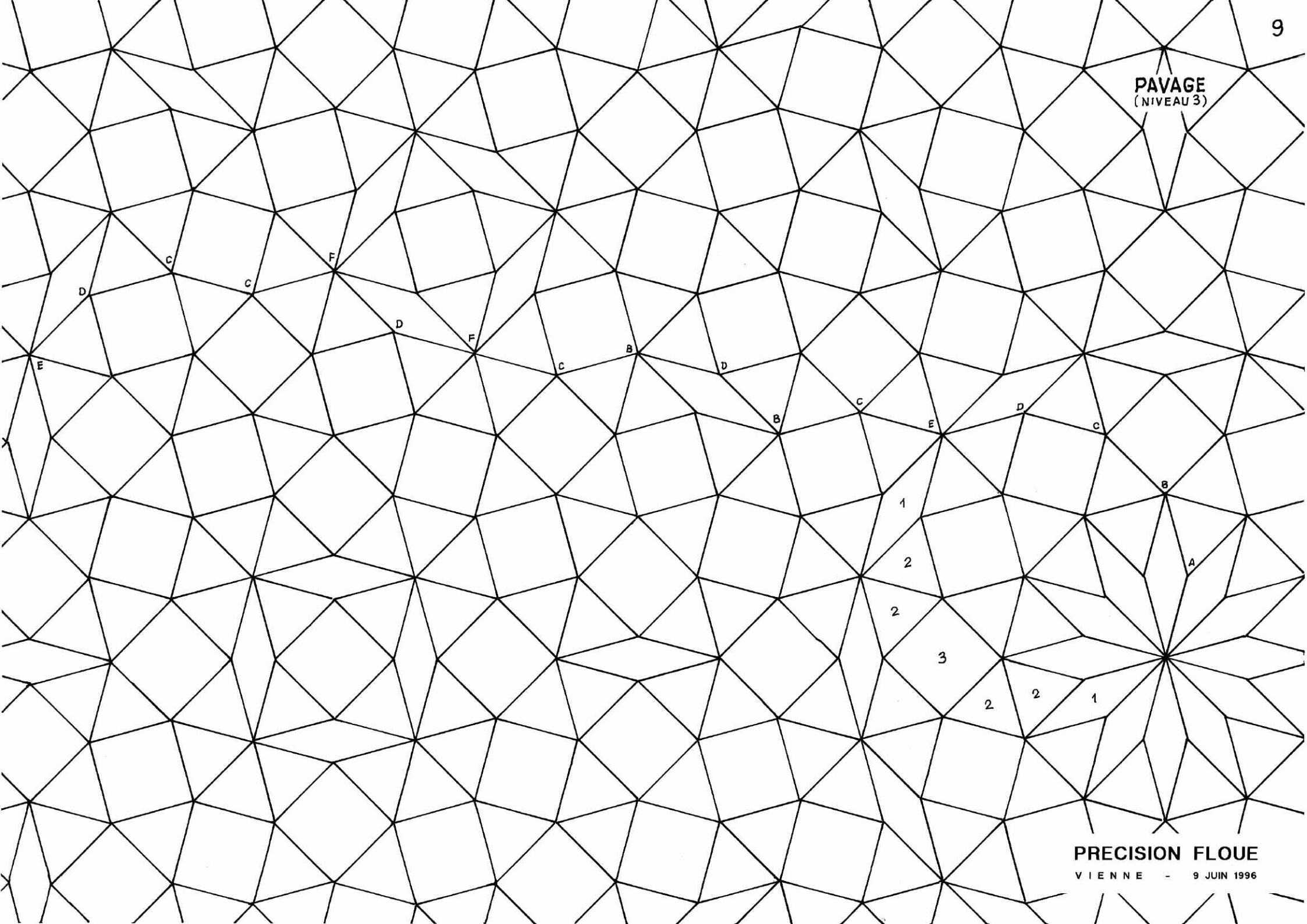
6 NŒUDS D'ASSEMBLAGE

(NON COMPRIS ORIGINE O)

PRECISION FLOUE

VIENNE - 9 JUIN 1996

PAVAGE
(NIVEAU 3)



PRECISION FLOUE

VIENNE - 9 JUIN 1996

REPETITION FRACTALE
5 NIVEAUX D'EXPANSION SUCCESSIFS

PRECISION FLOUE

V I E N N E - 9 J U I N 1 9 9 6

